PIĄTEK TRZYNASTEGO

Pokażemy, że w każdym roku piątek trzynastego występuje co najmniej raz i co najwyżej trzy razy.

Przyporządkujmy kolejnym dniom tygodnia, zaczynając od niedzieli, liczby $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$: niedziela – 0, poniedziałek – 1, . . . , sobota – 6. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$ niech $r_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ będzie numerem dnia tygodnia, na który przypada trzynasty dzień n-tego miesiąca[1]. Piątkowi odpowiada liczba 5, więc naszym celem jest pokazanie, że wśród liczb $r_1, \ldots, r_{12}$ piątka występuje co najmniej raz i co najwyżej trzy razy.

Rozważmy najpierw przypadek roku zwykłego. Między 13 stycznia a 13 lutego, jest 30 dni (18 w styczniu i 12 w lutym). Nas interesuje tylko, jaką resztę modulo 7 daje ta "liczba pośrednich dni" (tzn. pełne tygodnie niczego nie zmieniają, możemy je pominąć). Ponieważ $30 \equiv 2 \pmod 7$, więc $r_2 \equiv r_1 + 2 + 1 \pmod 7$. Między 13 lutego a 13 marca w roku zwykłym jest 27 dni, $27 \equiv 6 \pmod 7$, więc $r_3 \equiv 6 + 1 \pmod 7$. Dalsze miesiące mają po 30 albo 31 dni, i mamy

$$r_{n+1} \equiv \begin{cases} r_n + 3 & \text{gdy } n\text{-ty miesiąc ma 31 dni} \\ r_n + 2 & \text{gdy } n\text{-ty miesiąc ma 30 dni} \end{cases}$$

Oznaczmy $r_1 = r$. Przy pomocy r można wyrazić wszystkie r_n. Mianowicie, liczby w ciągu $(r_1, \ldots, r_{12})$ dają modulo 7 takie same reszty, jak liczby w ciągu

$$(r,\ r+3,\ r+3,\ r+6,\ r+1,\ r+4,\ r+6,\ r+2,\ r+5,\ r,\ r+3,\ r+5)$$

Nas interesuje, ile liczb w tym ciągu daje modulo 7 resztę 5 (odpowiadającą za piątek). Widać, że niezależnie od wyboru r, wystąpią w nim wszystkie reszty z dzielenia przez 7 (do r dodawana jest każda z liczb $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), przy czym żadna nie wystąpi więcej niż 3 razy. Widzimy też, że znając dzień tygodnia jaki wypada 13 stycznia, można łatwo policzyć ile razy w tym roku wystąpi piątek trzynastego:

raz	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada w poniedziałek, środę lub czwartek;
dwa razy	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada w piątek, sobotę lub niedzielę;
trzy razy	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada we wtorek.

Jeśli 13 stycznia roku zwykłego wypada we wtorek, to w lutym, marcu i listopadzie będzie piątek trzynastego.

W roku przestępnym dodatkowy dzień 29 lutego powoduje, że do liczb $r_3, \ldots, r_{12}$ trzeba dodać 1. Mamy wtedy ciąg

$$(r,\ r+3,\ r+4,\ r,\ r+2,\ r+5,\ r,\ r+3,\ r+6,\ r+1,\ r+4,\ r+6)$$

Zatem w roku przestępnym piątek trzynastego występuje:

raz	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada w środę, czwartek lub niedzielę;
dwa razy	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada w poniedziałek, wtorek lub sobotę;
trzy razy	$\Longleftrightarrow$	13 stycznia wypada w piątek.

Jeśli 13 stycznia roku przestępnego wypada w piątek, to jeszcze w kwietniu i lipcu będzie piątek trzynastego.

Literatura

[1] K. Kamiński, *Wybrane zagadnienia z matematycznych kółek olimpijskich*, Aksjomat, Toruń 2012.

[1] np. w roku 2012 dzień 13 marca to wtorek, a więc w tym przypadku $r_3 = 2$.